

# Variationsmethoden in der Geometrie

Michael Struwe, ETH Zürich

Emeriten-Stamm

28. Mai, 2018

## Die “sparsame” Natur



Jean Siméon Chardin  
(1699-1779)

Bei vorgegebenem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche; daher sind **Seifenblasen** rund.

## Fermatsches Prinzip



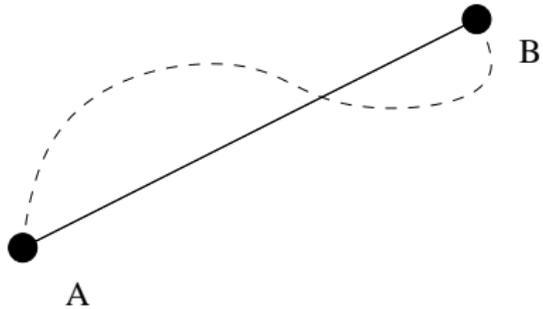
“Das Licht wählt den **optisch kürzesten** Weg.”

Pierre de Fermat (1607/08–  
1665)

# Fermatsches Prinzip

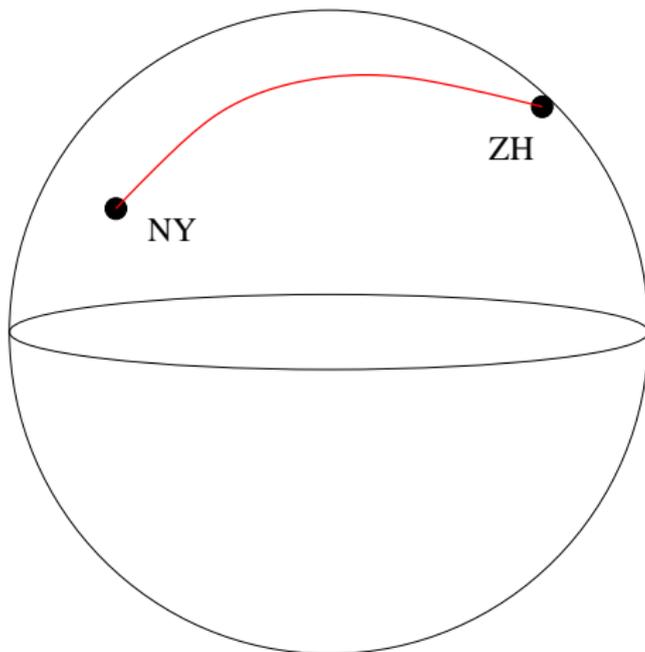


“Das Licht wählt den **optisch kürzesten** Weg.”



Pierre de Fermat (1607/08–  
1665)

## Kürzeste Wege, "Geodäten"



Eine Geodäte auf  $S^2$ .

## “Länge” versus “Energie”

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  geschlossen, zusammenhängend und glatt eingebettet.

## “Länge” versus “Energie”

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  geschlossen, zusammenhängend und glatt eingebettet.  
Für eine Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$  definiere

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt.$$

## “Länge” versus “Energie”

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  geschlossen, zusammenhängend und glatt eingebettet.  
Für eine Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$  definiere

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt.$$

### Theorem

Zu  $p, q \in S$  gibt es  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow S$  mit  $\gamma_0(0) = p$ ,  $\gamma_0(1) = q$ , so dass

$$E(\gamma_0) = \inf\{E(\gamma); \gamma \in \Gamma\},$$

wobei

$$\Gamma = \{\gamma \in H^1([0, 1]; \mathbb{R}^n), \forall t: \gamma(t) \in S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

und  $\gamma_0$  ist eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve minimaler Länge, welche  $p$  und  $q$  verbindet.

## “Länge” versus “Energie”

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  geschlossen, zusammenhängend und glatt eingebettet.  
Für eine Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$  definiere

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt.$$

### Theorem

Zu  $p, q \in S$  gibt es  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow S$  mit  $\gamma_0(0) = p$ ,  $\gamma_0(1) = q$ , so dass

$$E(\gamma_0) = \inf\{E(\gamma); \gamma \in \Gamma\},$$

wobei

$$\Gamma = \{\gamma \in H^1([0, 1]; \mathbb{R}^n), \forall t: \gamma(t) \in S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

und  $\gamma_0$  ist eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve **minimaler Länge**, welche  $p$  und  $q$  verbindet.

## “Länge” versus “Energie”

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  geschlossen, zusammenhängend und glatt eingebettet.  
Für eine Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$  definiere

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt.$$

### Theorem

Zu  $p, q \in S$  gibt es  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow S$  mit  $\gamma_0(0) = p$ ,  $\gamma_0(1) = q$ , so dass

$$E(\gamma_0) = \inf\{E(\gamma); \gamma \in \Gamma\},$$

wobei

$$\Gamma = \{\gamma \in H^1([0, 1]; \mathbb{R}^n), \forall t: \gamma(t) \in S, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

und  $\gamma_0$  ist eine **proportional zur Bogenlänge** parametrisierte Kurve **minimaler Länge**, welche  $p$  und  $q$  verbindet.

## Vorzüge der Energie gegenüber der Länge

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt$$

## Vorzüge der Energie gegenüber der Länge

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt$$

Beachte:

$L^2(\gamma) \leq 2E(\gamma)$ , “=” gilt **genau**, wenn  $|\dot{\gamma}(t)| \equiv \text{const.}$

## Vorzüge der Energie gegenüber der Länge

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt$$

Beachte:

$$L^2(\gamma) \leq 2E(\gamma), \quad "=" \text{ gilt genau, wenn } |\dot{\gamma}(t)| \equiv \text{const.}$$

Während  $L(\gamma)$  unter Umparametrisierungen der Kurve **invariant** ist, zeichnet  $E$  eine **optimale** Parametrisierung aus.

## Vorzüge der Energie gegenüber der Länge

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt$$

Beachte:

$$L^2(\gamma) \leq 2E(\gamma), \quad "=" \text{ gilt genau, wenn } |\dot{\gamma}(t)| \equiv \text{const.}$$

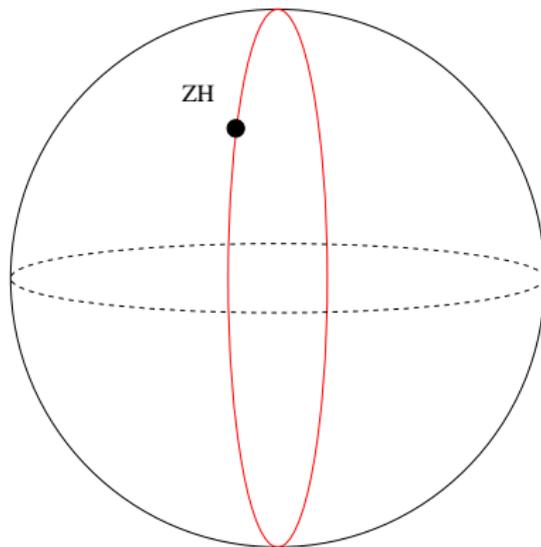
Während  $L(\gamma)$  unter Umparametrisierungen der Kurve **invariant** ist, zeichnet  $E$  eine **optimale** Parametrisierung aus.

Zudem kann man zum Auffinden von Minimalen der Energie  $E$  **Hilbertraum-Methoden** benutzen im Raum

$$H^1([0, 1]; \mathbb{R}^n) = \{\gamma \in L^2([0, 1]); \dot{\gamma} \in L^2([0, 1])\},$$
$$\|\gamma\|_{H^1}^2 = \int_0^1 (|\gamma|^2 + |\dot{\gamma}|^2) dt .$$

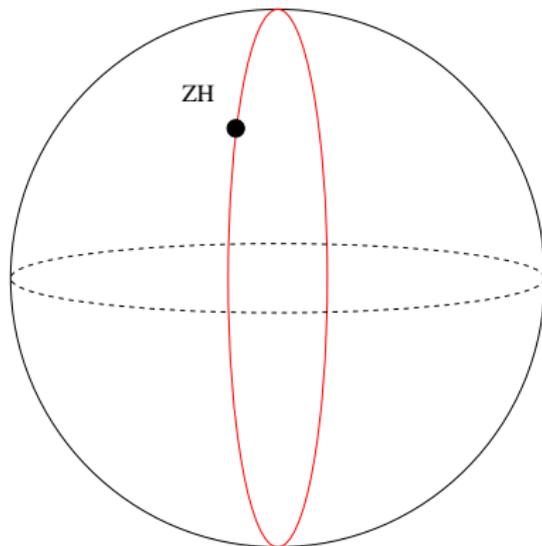
# Geschlossene Geodäten

Wege von Zürich nach Zürich



# Geschlossene Geodäten

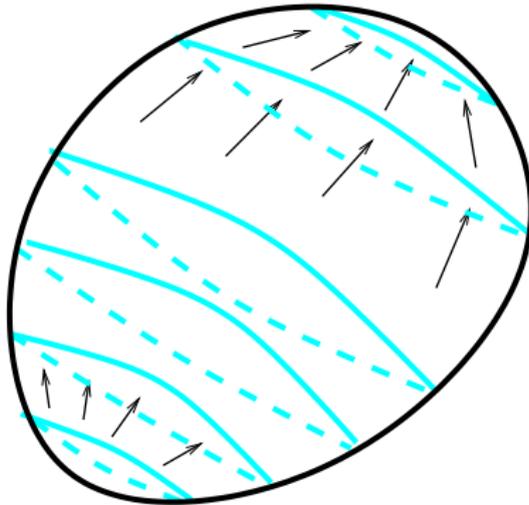
Wege von Zürich nach Zürich



Geschlossene Geodäten sind nur **lokal** Kürzeste; sie sind **Sattelpunkte** der Energie (hier vom Index 1).

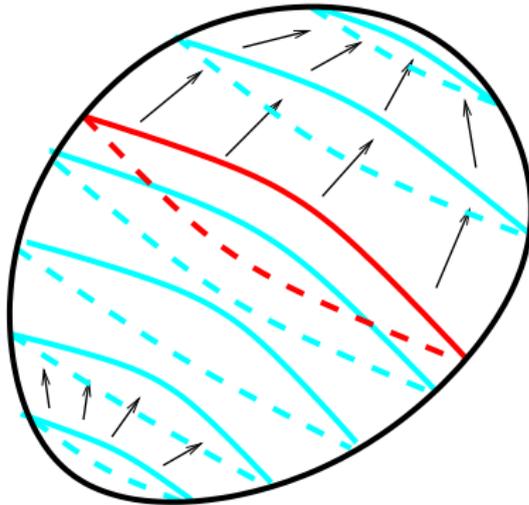
## Geschlossene Geodäten

Mittels der Methode des “sweep-out” gelang **Birkhoff** (1917) erstmalig der Nachweis einer geschlossenen Geodäten auf einer allgemeinen Fläche vom Typ der Sphäre.



# Geschlossene Geodäten

Mittels der Methode des “sweep-out” gelang **Birkhoff** (1917) erstmalig der Nachweis einer geschlossenen Geodäten auf einer allgemeinen Fläche vom Typ der Sphäre.



## Geschlossene Geodäten

Die Sätze von **Birkhoff** (1917), **Lusternik-Schnirelman** (1929/1947) über die Existenz und Multiplizität doppelunkfreier geschlossener Geodäten auf allgemeinen Flächen vom Typ der Sphäre sind erste **Höhepunkte** der **modernen Variationsrechnung** (Lusternik (1947), Klingenberg (1965,1978), Ballmann (1978)).

## Geschlossene Geodäten

Die Sätze von **Birkhoff** (1917), **Lusternik-Schnirelman** (1929/1947) über die Existenz und Multiplizität doppelunkfreier geschlossener Geodäten auf allgemeinen Flächen vom Typ der Sphäre sind erste **Höhepunkte** der **modernen Variationsrechnung** (Lusternik (1947), Klingenberg (1965,1978), Ballmann (1978)).

Für das Spektrum  $\text{Spek}(M, g)$  des Laplace-Operators auf  $(M, g)$  und das "Spektrum"  $\Sigma_g$  der Längen geschlossener Geodäten gilt:

$$\text{Spek}(M, g_1) = \text{Spek}(M, g_2) \text{ genau, wenn } \Sigma_{g_1} = \Sigma_{g_2}$$

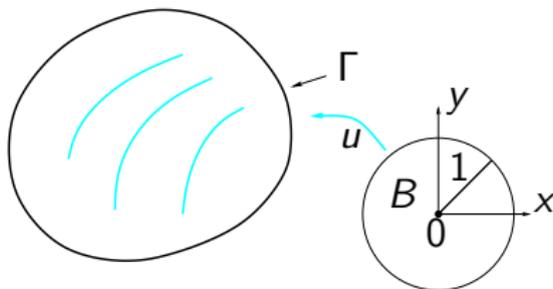
(Selbergsche Spurformel; Huber (1959), Colin de Verdière (1977)).

## Minimalflächen

**Plateau-Problem:** Zu gegebener, geschlossener Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  finde eine Fläche  $u: B = B_1(0; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit kleinstem **Flächeninhalt**

$$A(u) = \int_B |u_x \wedge u_y| \, dx dy,$$

welche von  $\Gamma$  berandet wird, wobei  $u_x = \partial u / \partial x$ , etc.

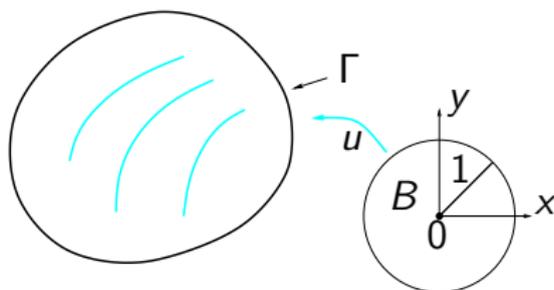


## Minimalflächen

**Plateau-Problem:** Zu gegebener, geschlossener Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  finde eine Fläche  $u: B = B_1(0; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit kleinstem **Flächeninhalt**

$$A(u) = \int_B |u_x \wedge u_y| \, dx dy,$$

welche von  $\Gamma$  berandet wird, wobei  $u_x = \partial u / \partial x$ , etc.



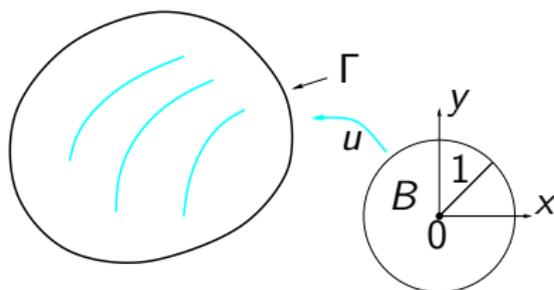
Analog zur Kurvenlänge  $L$  ist  $A$  **invariant** unter beliebigen Umparametrisierungen;

## Minimalflächen

**Plateau-Problem:** Zu gegebener, geschlossener Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  finde eine Fläche  $u: B = B_1(0; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit kleinstem **Flächeninhalt**

$$A(u) = \int_B |u_x \wedge u_y| \, dx dy,$$

welche von  $\Gamma$  berandet wird, wobei  $u_x = \partial u / \partial x$ , etc.



Analog zur Kurvenlänge  $L$  ist  $A$  **invariant** unter beliebigen Umparametrisierungen; das Flächenfunktional ist daher nicht “koerziv” bezüglich einer geeigneten Norm.

# “Flächeninhalt” versus “Dirichlet-Energie”

Neben dem Flächeninhalt

$$A(u) = \int_B |u_x \wedge u_y| dx dy$$

betrachte auch das **Dirichlet-Integral**

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_B (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy.$$

## “Flächeninhalt” versus “Dirichlet-Energie”

Neben dem Flächeninhalt

$$A(u) = \int_B |u_x \wedge u_y| dx dy$$

betrachte auch das **Dirichlet-Integral**

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_B (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy.$$

Analog zur Beziehung  $L^2(\gamma) \leq 2E(\gamma)$  für Kurven  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$  gilt wegen  $2ab \leq a^2 + b^2$  für  $a, b > 0$  stets die Relation  $A(u) \leq D(u)$ ,

## “Flächeninhalt” versus “Dirichlet-Energie”

Neben dem Flächeninhalt

$$A(u) = \int_B |u_x \wedge u_y| dx dy$$

betrachte auch das **Dirichlet-Integral**

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_B (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy.$$

Analog zur Beziehung  $L^2(\gamma) \leq 2E(\gamma)$  für Kurven  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$  gilt wegen  $2ab \leq a^2 + b^2$  für  $a, b > 0$  stets die Relation  $A(u) \leq D(u)$ , mit Gleichheit genau dann, wenn  $u$  **konform** ist mit

$$|u_x|^2 = |u_y|^2, \quad u_x \cdot u_y = 0.$$

# Der Satz von Douglas

Plateau-Randbedingung:

$$u|_{\partial B}: \partial B \rightarrow \Gamma \text{ stetig, schwach monoton.} \quad (1)$$

# Der Satz von Douglas

Plateau-Randbedingung:

$$u|_{\partial B}: \partial B \rightarrow \Gamma \text{ stetig, schwach monoton.} \quad (1)$$

## Theorem (Douglas)

Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine glatt eingebetteten Raumkurve, und sei

$$M := \{u \in H^1(B; \mathbb{R}^3); u \text{ erfüllt (1)}\}$$

Dann gibt es ein  $u \in M$  mit

$$D(u) = \min_{v \in M} D(v) = \min_{v \in M} A(v),$$

und  $u$  ist konform und harmonisch mit  $\Delta u = 0$  in  $B$ .

# Der Satz von Douglas

Plateau-Randbedingung:

$$u|_{\partial B}: \partial B \rightarrow \Gamma \text{ stetig, schwach monoton.} \quad (1)$$

## Theorem (Douglas)

Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine glatt eingebetteten Raumkurve, und sei

$$M := \{u \in H^1(B; \mathbb{R}^3); u \text{ erfüllt (1)}\}$$

Dann gibt es ein  $u \in M$  mit

$$D(u) = \min_{v \in M} D(v) = \min_{v \in M} A(v),$$

und  $u$  ist *konform* und harmonisch mit  $\Delta u = 0$  in  $B$ .

# Der Satz von Douglas

Plateau-Randbedingung:

$$u|_{\partial B}: \partial B \rightarrow \Gamma \text{ stetig, schwach monoton.} \quad (1)$$

## Theorem (Douglas)

Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine glatt eingebetteten Raumkurve, und sei

$$M := \{u \in H^1(B; \mathbb{R}^3); u \text{ erfüllt (1)}\}$$

Dann gibt es ein  $u \in M$  mit

$$D(u) = \min_{v \in M} D(v) = \min_{v \in M} A(v),$$

und  $u$  ist *konform* und *harmonisch* mit  $\Delta u = 0$  in  $B$ .

## Minimalflächen

i) Die in Satz von Douglas erhaltenen Minimalen parametrisieren **reguläre Flächenstücke** mit höchstens endlich vielen Verzweigungspunkten (Osserman (1970), Alt (1972), Gulliver (1973)).

## Minimalflächen

- i) Die in Satz von Douglas erhaltenen Minimalen parametrisieren **reguläre Flächenstücke** mit höchstens endlich vielen Verzweigungspunkten (Osserman (1970), Alt (1972), Gulliver (1973)).
- ii) Für eine konform parametrisierte Fläche  $u: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$\Delta u = 2Hu_x \wedge u_y \text{ in } B,$$

wobei  $H$  die **mittlere Krümmung** bezeichnet.

## Minimalflächen

- i) Die in Satz von Douglas erhaltenen Minimalen parametrisieren **reguläre Flächenstücke** mit höchstens endlich vielen Verzweigungspunkten (Osserman (1970), Alt (1972), Gulliver (1973)).
- ii) Für eine konform parametrisierte Fläche  $u: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$\Delta u = 2Hu_x \wedge u_y \text{ in } B,$$

wobei  $H$  die **mittlere Krümmung** bezeichnet.

Allgemein bezeichnen wir konform parametrisierte Flächen mit  $H = 0$  als **Minimalflächen**.

## Minimalflächen

- i) Die in Satz von Douglas erhaltenen Minimalen parametrisieren **reguläre Flächenstücke** mit höchstens endlich vielen Verzweigungspunkten (Osserman (1970), Alt (1972), Gulliver (1973)).
- ii) Für eine konform parametrisierte Fläche  $u: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$\Delta u = 2Hu_x \wedge u_y \text{ in } B,$$

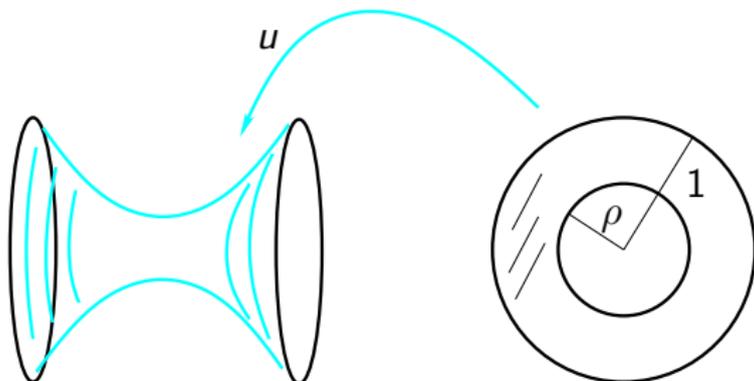
wobei  $H$  die **mittlere Krümmung** bezeichnet.

Allgemein bezeichnen wir konform parametrisierte Flächen mit  $H = 0$  als **Minimalflächen**.

- iii) Wie im Falle der Geodäten ist man an der Gesamtheit **aller** Minimalflächen zu vorgegebener Randkurve interessiert, insbesondere an **instabilen** Lösungen und **“Morse-Ungleichungen”** (Morse-Tompkins (1939), Tromba (1980-85), S. (1982/84)).

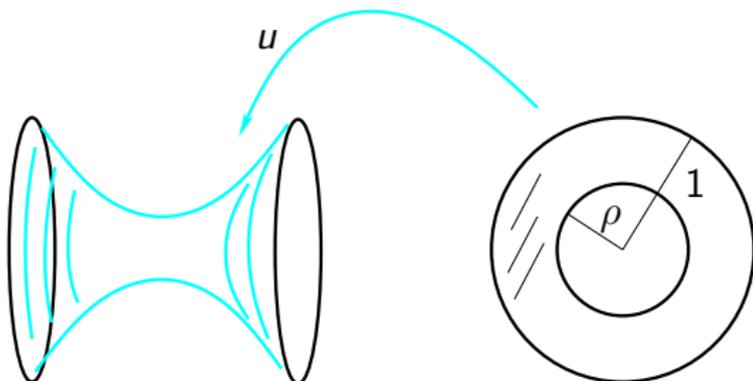
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Analog kann man Minimalflächen höheren topologischen Typs behandeln, z.B. zu einem Paar vorgegebener Kurven  $\Gamma_1, \Gamma_2$  Flächen vom Typ des Kreisrings  $A_\rho = B \setminus B_\rho(0)$ .



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Analog kann man Minimalflächen höheren topologischen Typs behandeln, z.B. zu einem Paar vorgegebener Kurven  $\Gamma_1, \Gamma_2$  Flächen vom Typ des Kreisrings  $A_\rho = B \setminus B_\rho(0)$ .



Die minimale Energie parametrischer Flächen  $u: A_\rho \rightarrow \mathbb{R}^3$  wird nun zusätzlich durch den **konformen Modul**  $0 < \rho < 1$  bestimmt.

# Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Die Rechnung zeigt:

Ein  $u_\rho: A_\rho \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit minimaler Dirichlet-Energie  $D(u_\rho) =: E(\rho)$  ist stets **harmonisch**.

# Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Die Rechnung zeigt:

Ein  $u_\rho: A_\rho \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit minimaler Dirichlet-Energie  $D(u_\rho) =: E(\rho)$  ist stets **harmonisch**.

$u_\rho$  ist **konform** genau dann, wenn  $\frac{dE(\rho)}{d\rho} = 0$ .

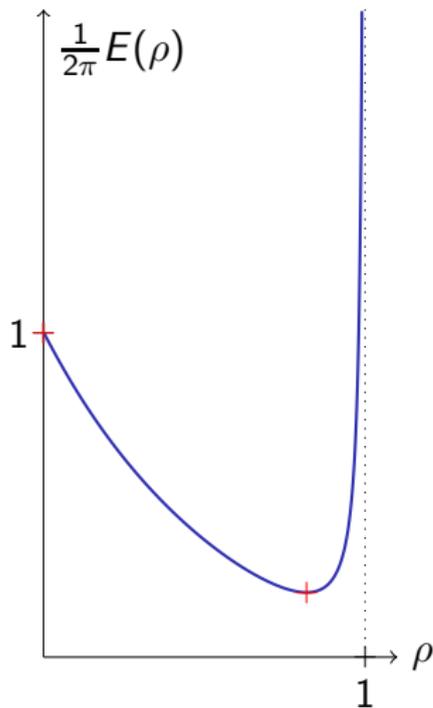
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$d = 0.2$

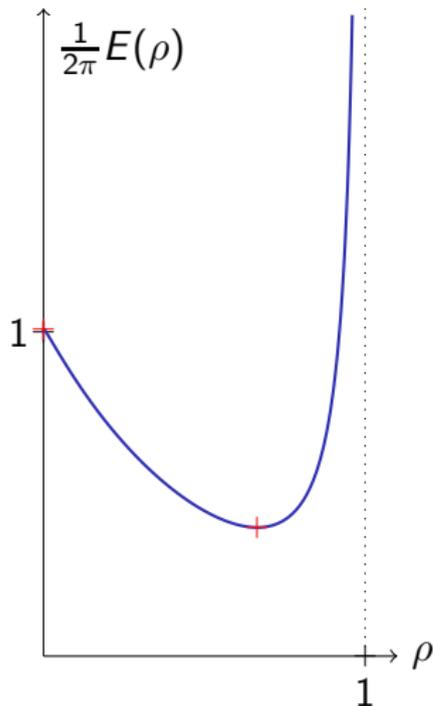
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$$d = 0.4$$

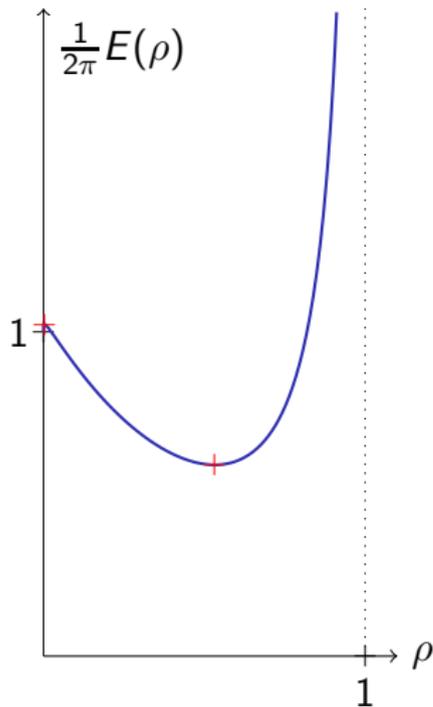
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$$d = 0.6$$

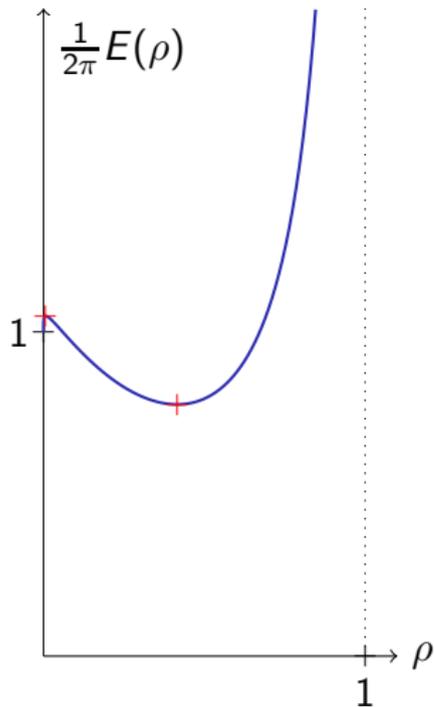
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$$d = 0.8$$

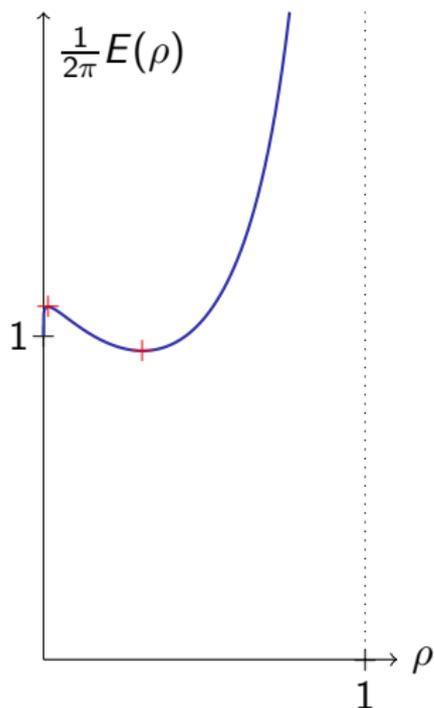
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$d = 1.0$

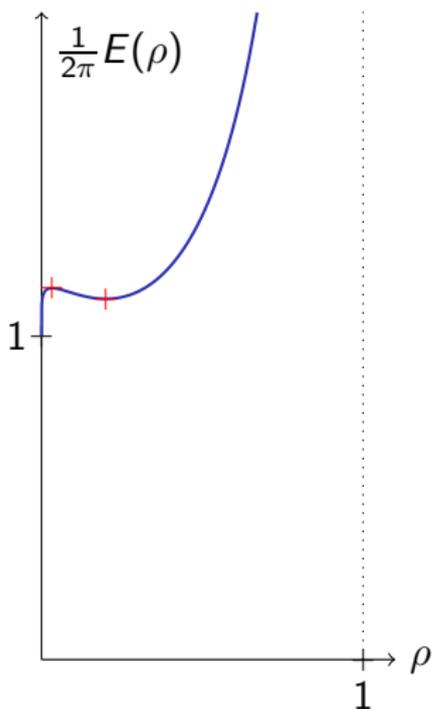
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$$d = 1.2$$

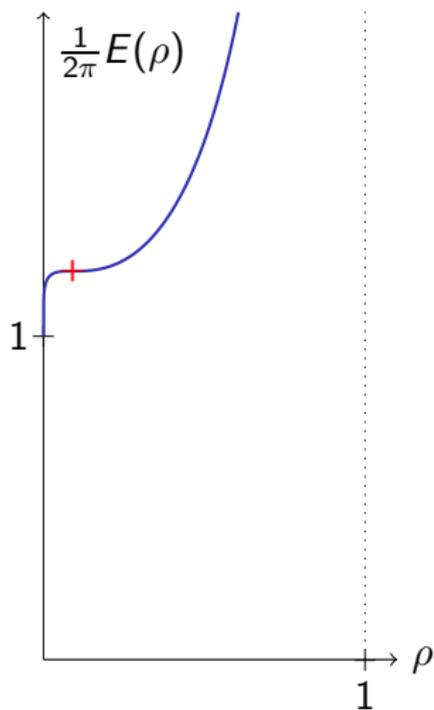
## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



$$d = 1.3254$$

## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

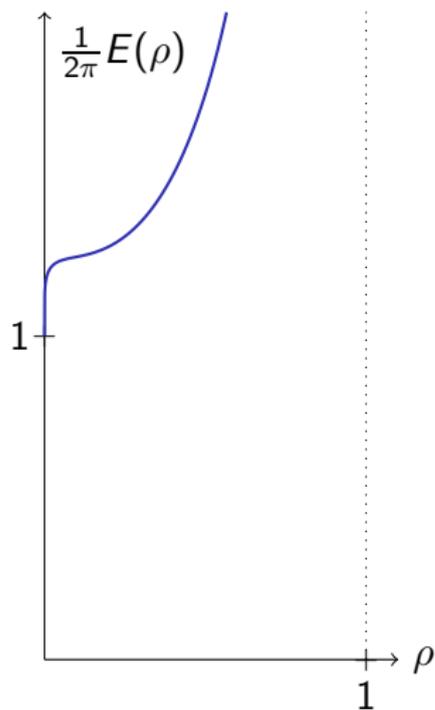
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



$d = 1.4$

## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

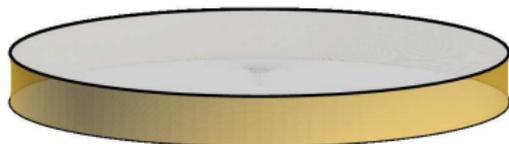
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

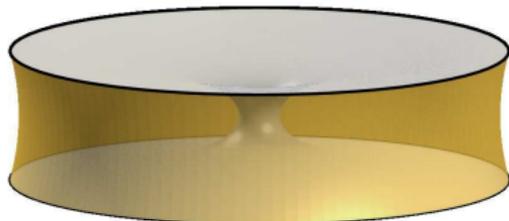
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1 - \rho}{1 + \rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

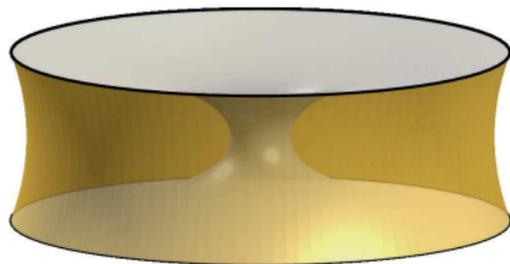
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1 - \rho}{1 + \rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

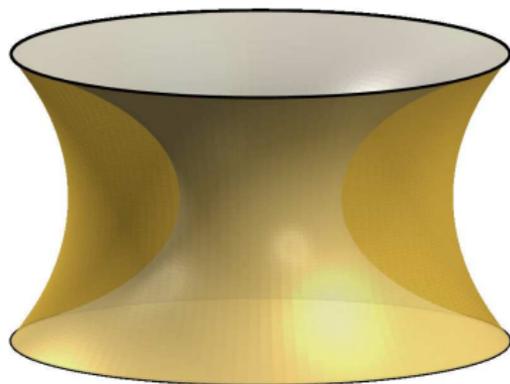
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

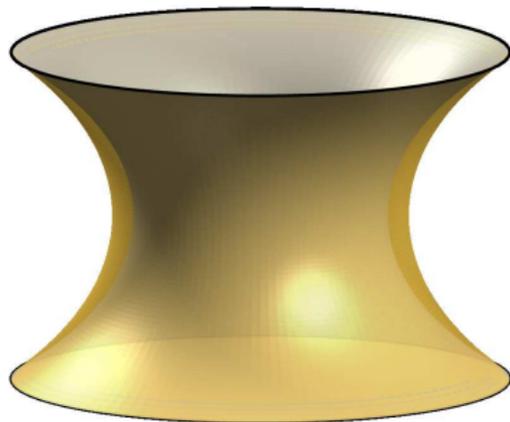
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1 - \rho}{1 + \rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

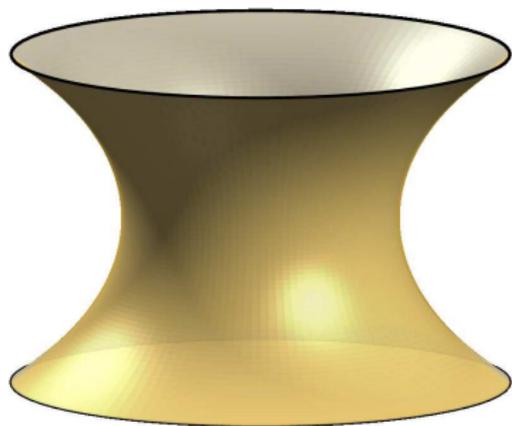
Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .

(Graphik: Mario Schulz)



## Minimalflächen vom Typ des Kreisrings

Für parallele, co-axiale Kreise vom Radius 1 in zwei parallelen Ebenen mit Abstand  $d > 0$  gilt

$$E(\rho) = 2\pi \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} - \frac{d^2}{2 \log \rho} \right).$$

Für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert  $E(\rho) \rightarrow \infty$ .

Für  $\rho \rightarrow 0$  erhalten wir 2 parallele Kreisflächen jeweils mit Inhalt  $\pi$ .



(Graphik: Mario Schulz)

## Minimalflächen allgemeinen Typs

S. (1986), Jost-S. (1990): Morse-Theorie für Minimalflächen höheren topologischen Typs, stetige “Deformation” durch den Rand des Teichmüller-Raumes vorgegebener topologischer Struktur hindurch in Richtung abnehmender Dirichlet-Energie.

## Minimalflächen allgemeinen Typs

S. (1986), Jost-S. (1990): Morse-Theorie für Minimalflächen höheren topologischen Typs, stetige “Deformation” durch den Rand des Teichmüller-Raumes vorgegebener topologischer Struktur hindurch in Richtung abnehmender Dirichlet-Energie.

Rupflin-Topping (2012-): Gleichzeitige Verformung von Fläche und topologischem Typ im Teichmüller-Raum, kanonische Deformation einer Abbildung in eine Summe von minimalen Immersionen.

## Minimalflächen allgemeinen Typs

S. (1986), Jost-S. (1990): Morse-Theorie für Minimalflächen höheren topologischen Typs, stetige “Deformation” durch den Rand des Teichmüller-Raumes vorgegebener topologischer Struktur hindurch in Richtung abnehmender Dirichlet-Energie.

Rupflin-Topping (2012-): Gleichzeitige Verformung von Fläche und topologischem Typ im Teichmüller-Raum, kanonische Deformation einer Abbildung in eine Summe von minimalen Immersionen.

DeGiorgi, Allard, Almgren, Federer, Fleming (1960er): Geometrische Masstheorie (“currents”, “varifolds” statt parametrischer Flächen).

## Minimalflächen allgemeinen Typs

S. (1986), Jost-S. (1990): Morse-Theorie für Minimalflächen höheren topologischen Typs, stetige “Deformation” durch den Rand des Teichmüller-Raumes vorgegebener topologischer Struktur hindurch in Richtung abnehmender Dirichlet-Energie.

Rupflin-Topping (2012-): Gleichzeitige Verformung von Fläche und topologischem Typ im Teichmüller-Raum, kanonische Deformation einer Abbildung in eine Summe von minimalen Immersionen.

DeGiorgi, Allard, Almgren, Federer, Fleming (1960er): Geometrische Masstheorie (“currents”, “varifolds” statt parametrischer Flächen).

Almgren, Pitts (1981): Der Begriff der “almost minimal surfaces” erlaubt Sattelpunktkonstruktionen à la Birkhoff.

## Minimalflächen allgemeinen Typs

S. (1986), Jost-S. (1990): Morse-Theorie für Minimalflächen höheren topologischen Typs, stetige “Deformation” durch den Rand des Teichmüller-Raumes vorgegebener topologischer Struktur hindurch in Richtung abnehmender Dirichlet-Energie.

Rupflin-Topping (2012-): Gleichzeitige Verformung von Fläche und topologischem Typ im Teichmüller-Raum, kanonische Deformation einer Abbildung in eine Summe von minimalen Immersionen.

DeGiorgi, Allard, Almgren, Federer, Fleming (1960er): Geometrische Masstheorie (“currents”, “varifolds” statt parametrischer Flächen).

Almgren, Pitts (1981): Der Begriff der “almost minimal surfaces” erlaubt Sattelpunktkonstruktionen à la Birkhoff.

Marques-Neves (2012/14): Beweis der Willmore-Vermutung mit höher-dimensionalen “sweep-outs”.

## Minimalflächen allgemeinen Typs

S. (1986), Jost-S. (1990): Morse-Theorie für Minimalflächen höheren topologischen Typs, stetige “Deformation” durch den Rand des Teichmüller-Raumes vorgegebener topologischer Struktur hindurch in Richtung abnehmender Dirichlet-Energie.

Rupflin-Topping (2012-): Gleichzeitige Verformung von Fläche und topologischem Typ im Teichmüller-Raum, kanonische Deformation einer Abbildung in eine Summe von minimalen Immersionen.

DeGiorgi, Allard, Almgren, Federer, Fleming (1960er): Geometrische Masstheorie (“currents”, “varifolds” statt parametrischer Flächen).

Almgren, Pitts (1981): Der Begriff der “almost minimal surfaces” erlaubt Sattelpunktkonstruktionen à la Birkhoff.

Marques-Neves (2012/14): Beweis der Willmore-Vermutung mit höher-dimensionalen “sweep-outs”.

Borer-Galimberti-S. (2015), S. (2018): Sphärisches “bubbling” von Metriken vorgegebener Krümmung auf Flächen  $\Sigma$  mit  $\chi(\Sigma) \leq 0$ . 

## Quellen

Experiment mit Seifenhäuten:

<https://www.youtube.com/watch?v=JvOONik2Kbl>  
(mitolab 2009)

Das Experiment in Nahaufnahme:

Ray Goldstein, Cambridge.

(Dank an N. Hungerbühler für die Hinweise)

Der Titel “Die sparsame Natur” und die Illustration durch das Bild von Chardin sind angelehnt an:

Hildebrandt-Tromba: *“The parsimonious universe. Shape and form in the natural world”*, Copernicus, New York, 1996.